Β' ΔΥΣΚΟΛΙΑΣ

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

1) Σε ένα νησί φθάνουν καθημερινά πλοία, όπου αναχωρούν από Πειραιά και Ραφήνα και σε ποσοστά 60% και 40%. Το 10% των πλοίων από Πειραιά καθώς και το 5% των πλοίων από Ραφήνα φθάνουν με χρονοκαθυστέρηση στο νησί. Αν μια μέρα επιλέξαμε τυχαία ένα πλοίο που φθάνει στο νησί να βρείτε τις πιθανότητες:

i. Να έχει φτάσει με καθυστέρηση

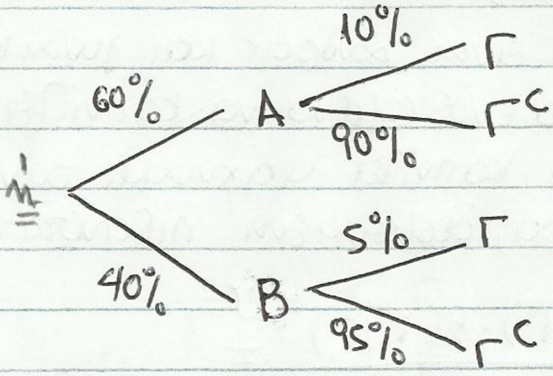
ii. Αν φτάσει με καθυστέρηση, να έρχεται από Πειραιά.

ΛΥΣΗ

Έστω $A = \{$από Πειραιά$\}$ και $B = \{$από Ραφήνα$\}$

με $P(A) = 60\%$ και $P(B) = 40\%$

Έω $\Gamma = \{$με χρονοκαθυστέρηση$\}$



i) Προφανώς θα είναι:

$$P(\Gamma) = \frac{60}{100}\cdot\frac{10}{100} + \frac{40}{100}\cdot\frac{5}{100} = \frac{6}{100} + \frac{2}{100} = \frac{8}{100} = 8\%$$

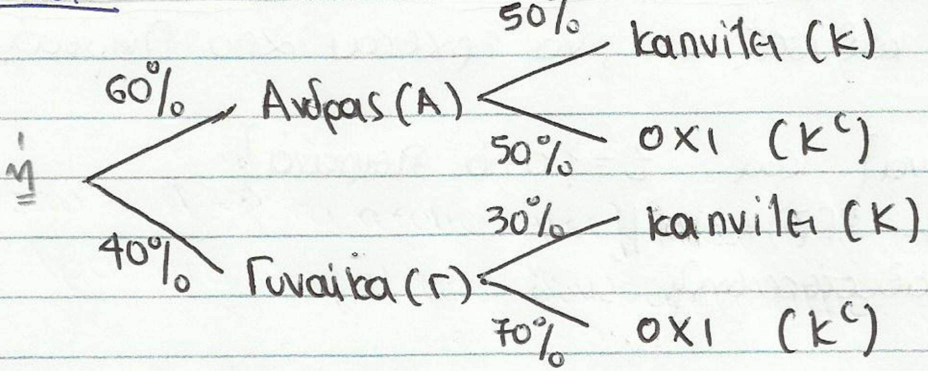
ii) Δεδομένου ότι έχει καθυστέρηση ψάχνουμε την πιθανότητα να είναι από Πειραιά.

Άρα, δεσμευμένη πιθανότητα:

$$P(A/\Gamma) = \frac{P(A\cap\Gamma)}{P(\Gamma)} \underset{\uparrow \text{ Bayes}}{=} \frac{P(A)\cdot P(\Gamma/A)}{P(\Gamma)} = \frac{\frac{60}{100}\cdot\frac{10}{100}}{\frac{8}{100}} = \frac{3}{4} = 75\%$$

2) Σε ένα εργοστάσιο το 60% των εργαζομένων είναι άνδρες και το 40% γυναίκες. Από τους άνδρες καπνίζει το 50% και από τις γυναίκες το 30%. Γίνεται τυχαία επιλογή ατόμου όπου καπνίζει. Να υπολογιστεί η πιθανότητα να είναι γυναίκα.

ΛΥΣΗ



Έστω, Α και Γ τα ενδεχόμενα να είναι άνδρας και γυναίκα αντιστοίχως, ενώ ας είναι Κ το ενδεχόμενο να καπνίζει. Δεδομένου επιλογής ατόμου που καπνίζει ψάχνουμε την πιθανότητα να είναι γυναίκα. Άρα, δεσμευμένη πιθανότητα:

$$P(Γ/Κ) = \frac{P(Γ \cap Κ)}{P(Κ)} \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(Γ)\cdot P(Κ/Γ)}{P(Κ)} =$$

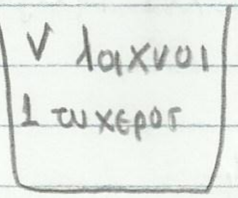
Οι δυνατές περιπτώσεις για άτομο που καπνίζει

$$= \frac{\frac{40}{100}\cdot\frac{30}{100}}{\frac{60}{100}\cdot\frac{50}{100}+\frac{40}{100}\cdot\frac{30}{100}} = \frac{2}{7} \approx 28\%$$

ΤΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ

3) Μια κληρωτίδα περιέχει ν λαχνούς από τους οποίους κερδίζει μόνο ένας. Δύο άτομα παίρνουν το ένα μετά το άλλο από την κληρωτίδα ένα ακριβώς λαχνό χωρίς επανατοποθέτηση. Κάποιος υποστηρίζει ότι το πρώτο άτομο έχει πιο μεγάλη πιθανότητα να κερδίσει από το δεύτερο άτομο. Να εξετάσετε εάν έχει δίκαιο.

ΛΥΣΗ

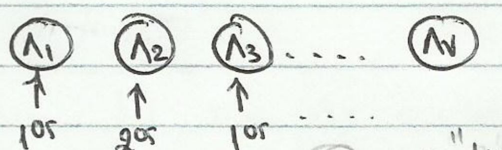


Γενικά, η πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{$ να κερδίσει το 1^o άτομο $\}$ είναι ίση με:

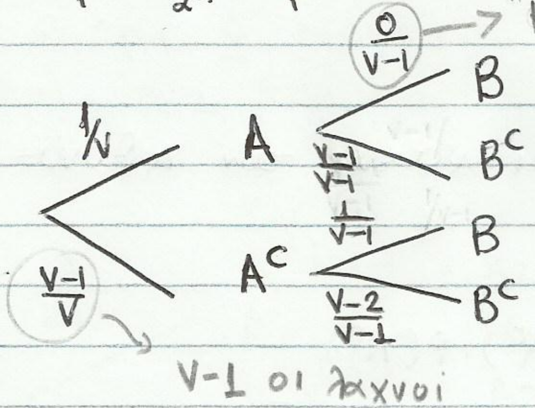
$$\boxed{P(A) = \frac{1}{\nu}}$$

διότι ένας λαχνός στους ν μπορεί να κερδίσει.

Έστω επίσης το $B = \{$ να κερδίσει το 2^o άτομο $\}$



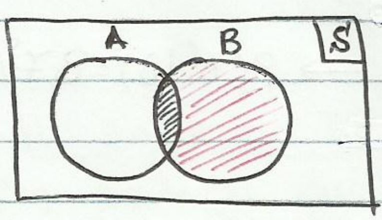
"μηδέν" αφού ο Α έχει κερδίσει



(*) Άρα η πιθανότητα να κερδίσει το 1^o είναι $\frac{1}{\nu}$

(*) ενώ η πιθανότητα να κερδίσει το 2^o είναι $\frac{0}{\nu-1}$ ή $\frac{1}{\nu-1}$

VENN



$B = (A \cap B) \cup (B - A)$ ⇝ Ασυμβίβαστα

Άρα, $P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap A^c) =$

$= P(A) \cdot P(B|A) + P(A') \cdot P(B|A^c) =$

$= \frac{1}{\nu} \cdot 0 + \frac{\nu-1}{\nu} \cdot \frac{1}{\nu-1} = \frac{1}{\nu} = P(A)$

Να κερδίσει και ο $2^{ος}$

Δεδομένου ότι κερδίσει ο $1^{ος}$

Άρα, $P(A) = P(B)$

Επομένως, ο τύπος έχει άδικο.

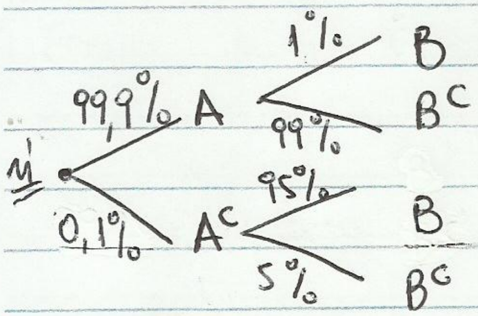
ΑΣΘΕΝΕΙΑ

4) Το 0,1% ενός πληθυσμού πάσχει από μια σοβαρή ασθένεια. Ένα καινούριο τεστ διάγνωσης της ασθένειας έχει πιθανότητα θετικού σφάλματος (θετικό τεστ, ενώ το άτομο είναι υγιές) ίση με 1% και πιθανότητα αρνητικού σφάλματος (αρνητικό τεστ, ενώ το άτομο πάσχει από την ασθένεια) ίση με 5%. Για ένα τυχαίο άτομο από τον πληθυσμό αυτό το τεστ είναι θετικό. Να βρείτε την πιθανότητα να πάσχει πράγματι από ταυτη την ασθένεια.

ΛΥΣΗ

Έστω $A=\{\text{το άτομο υγιές}\}$ και $B=\{\text{το τεστ θετικό}\}$

Άρα, στο παρακάτω δενδροδιάγραμμα, έχουμε:



Δεδομένου ότι το τεστ είναι θετικό και ψάχνω την πιθανότητα να πάσχει από την ασθένεια.

Δεσμευμένη πιθανότητα.

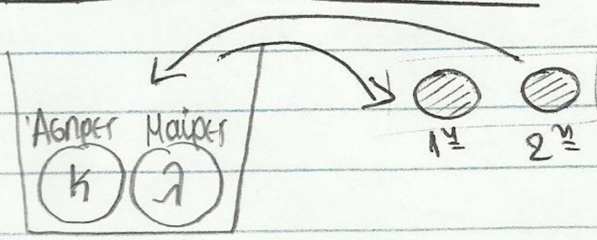
$$P(A^c|B)=\frac{P(A^c\cap B)}{P(B)}\overset{\text{Bayes}}{=}\frac{P(B|A^c)\cdot P(A^c)}{P(B)}=$$

$$=\frac{\frac{95}{100}\cdot\frac{0,1}{100}}{\frac{99,9}{100}\cdot\frac{1}{100}+\frac{0,1}{100}\cdot\frac{95}{100}}=\frac{95}{1094}\approx 0,087\longrightarrow P(A^c|B)=8,7\%$$

5) Ένα κουτί περιέχει σφαιρίδια όμοια σε μέγεθος και σχήμα. Οι κ σφαίρες από αυτές είναι άσπρες και οι υπόλοιπες λ είναι μαύρες. Παίρνουμε δύο σφαίρες τη μία μετά την άλλη, δίχως επανατοποθέτηση της πρώτης σφαίρας. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου η $2^{η}$ σφαίρα να είναι μαύρη. Αν επανατοποθετήσουμε την $1^{η}$ σφαίρα ποια τότε η πιθανότητα η $2^{η}$ σφαίρα να είναι μαύρη; Τι παρατηρείτε;

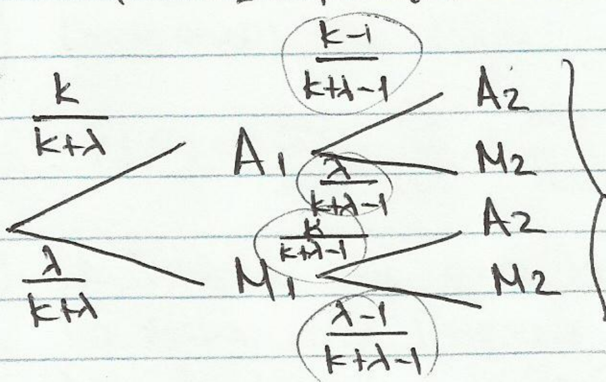
ΛΥΣΗ

• Χωρίς επανατοποθέτηση:



Έστω A_1 και M_1 τα ενδεχόμενα η $1^{η}$ να είναι άσπρη ή μαύρη.
Και A_2 και M_2 " " " $2^{η}$ " " " άσπρη ή μαύρη.

(Από θεώρημα ολικής πιθανότητας:)



$$P(M_2) = \frac{k}{k+\lambda}\cdot\frac{\lambda}{k+\lambda-1} + \frac{\lambda}{k+\lambda}\cdot\frac{\lambda-1}{k+\lambda-1} = $$

$$= \frac{\lambda}{(k+\lambda)\cancel{(k+\lambda-1)}}\cancel{(k+\lambda-1)} = \frac{\lambda}{k+\lambda}$$

• Με επανατοποθέτηση:

Αν βάλουμε την $1^{η}$ σφαίρα στο κουτί τότε προφανώς από το δενδροδιάγραμμα πάλι η πιθανότητα να είναι η $1^{η}$ μαύρη θα είναι πάλι $\frac{\lambda}{k+\lambda}$.
Δηλαδή με ή χωρίς επανατοποθέτηση της $1^{ης}$ σφαίρας στην κάλπη η πιθανότητα η σφαίρα η $1^{η}$ να είναι μαύρη είναι ίδια.